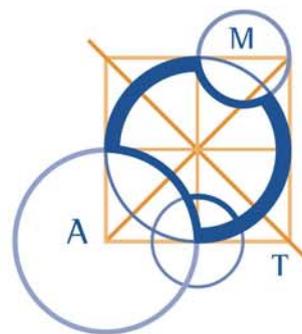


# AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION

AN ACTIVITY OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICS TRUST



姓 名：

## SENIOR DIVISION COMPETITION PAPER

2012 高級卷（11—12 年級）

考試時間：75 分鐘

### 注意事項

#### 一般規定

1. 未獲監考老師許可之前不可翻開此測驗題本。
2. 各種通訊器材一律不得攜入考場，不准使用電子計算器、計算尺、對數表、數學公式等計算器具。作答時可使用直尺與圓規，以及兩面全空白的草稿紙。
3. 題目所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。
4. 最前 25 題為選擇題，每題有五個選項。最後 5 題要求填入的答案為 000 至 999 的正整數。題目一般而言是依照越來越難的順序安排，對於錯誤的答案不會倒扣分數。
5. 本活動是數學競賽而不同於學校測驗，別期望每道題目都會作。考生只與同地區同年級的其他考生評比，因此不同年級的考生作答相同的試卷將不作評比。
6. 請依照監考老師指示，謹慎地在答案卡上填寫您的基本資料。若因填寫錯誤或不詳所造成之後果由學生自行負責。
7. 進入試場後，須等待監考老師宣佈開始作答後，才可以打開題本進行答題。

#### 作答須知

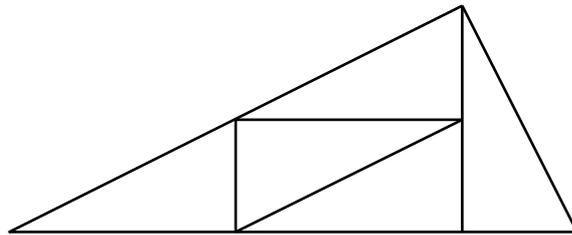
1. 限用 B 或 2B 鉛筆填寫答案。
2. 請用 B 或 2B 鉛筆在答案卡上將您認為正確選項的圓圈塗滿（不是在題本上）。
3. 您的答案卡將由電腦閱卷，為避免電腦誤判，請不要在答案卡上其他任何地方塗劃任何記號。填寫答案卡時，若需要修改，可使用軟性橡皮小心擦拭，並確定答案卡上無殘留痕跡。

#### 特別約定

為確保競賽之公平性及認證成績優異學生，AMC 主辦單位保留要求考生重測之權利。



8. 兩瓶香水罐的外型與內部都完全相似，但其中一罐的高度是另一罐的兩倍。它們的總容量為 270 ml。請問小瓶香水罐的容量為多少 ml？  
 (A) 27      (B) 30      (C) 50      (D) 54      (E) 90
9. 已知  $x$ 、 $y$  為正整數，請問有多少個整數大於  $xy$  但小於  $x(y+1)$ ？  
 (A) 1      (B)  $x-2$       (C)  $y-1$       (D)  $x$       (E)  $x-1$
10. 在墨爾本聯邦廣場的建築主要骨架為將一個大三角形分割為 5 個全等的小三角形，且它們都與大三角形相似。

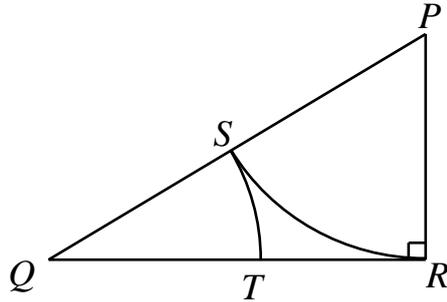


- 若小三角形的最短邊之邊長為 1 m，請問建造整個形狀共需多少 m 的骨架？  
 (A) 20      (B)  $8+4\sqrt{5}$       (C)  $10+4\sqrt{5}$   
 (D)  $12+4\sqrt{5}$       (E)  $15+5\sqrt{5}$

### 11-20 題，每題 4 分

11. 將五個相異的正整數依大小排列，最小的數是 5、最大的數是 16。這五個數的平均是個質數，正好也等於它們的中位數。請問這五個數中第二大的數有多少種可能值？  
 (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) 4
12. 請問三個數  $3^{\frac{3}{2}}$ 、 $3^{\frac{5}{2}}$ 、 $3^{\frac{7}{2}}$  的平均值是什麼？  
 (A)  $9\sqrt{3}$       (B)  $10\sqrt{3}$       (C)  $11\sqrt{3}$       (D)  $12\sqrt{3}$       (E)  $13\sqrt{3}$

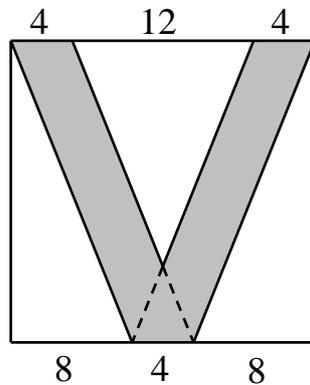
13. 下圖的直角三角形  $PQR$  中，角  $R$  為直角。以點  $P$  為圓心、 $PR$  為半徑的圓交  $PQ$  於點  $S$ ，以點  $Q$  為圓心、 $QS$  為半徑的圓交  $QR$  於點  $T$ 。



已知點  $T$  平分  $QR$ ，請問  $QS : SP$  是什麼？

- (A) 7 : 12      (B) 5 : 12      (C) 5 : 8      (D) 3 : 4      (E) 2 : 3
- 
14. 勇士隊與老鷹隊這兩支籃球隊進行三賽兩勝的友誼賽。勇士隊贏得每場比賽的機率為老鷹隊贏得每場比賽的機率之兩倍。請問老鷹隊贏得此項友誼賽的機率是什麼？
- (A)  $\frac{1}{3}$       (B)  $\frac{2}{9}$       (C)  $\frac{5}{27}$       (D)  $\frac{7}{27}$       (E)  $\frac{5}{18}$

15. 下圖的正方形之邊長為 20 cm，在其中有一個“V”型陰影，如圖所示。



請問陰影部分的面積為多少  $\text{cm}^2$ ？

- (A) 136      (B) 150      (C) 164      (D) 188      (E) 200
- 
16. 將算式  $10^{2012} - 2012$  所得的結果之所有數碼全部寫出，請問它的數碼和是多少？
- (A) 18100      (B) 18104      (C) 18108      (D) 18112      (E) 18116
- 
17. 已知一個直角三角形的三邊長構成一個等比數列且它的最短邊之長度為 2。請問這個直角三角形的斜邊之長度是什麼？
- (A)  $1 + \sqrt{5}$       (B)  $\sqrt{10}$       (C)  $3\sqrt{2} - 1$       (D)  $\sqrt{11}$       (E)  $2\sqrt{3}$

18. 小婕在八張完全相同的卡片中取出四張卡片，在其上各標記一個 X，在另外四張卡片上各標記一個 Y。她將這些卡片洗亂並以面朝下排成一列，要求小馬來猜卡片上的字母。小馬決定猜 XYXYXYXY。請問小馬猜中所有八張卡片的機率是什麼？
- (A)  $\frac{4}{8}$       (B)  $\frac{1}{70}$       (C)  $\frac{1}{85}$       (D)  $\frac{1}{90}$       (E)  $\frac{1}{256}$
- 
19. 一片邊長為正整數的矩形磁磚，它的對角線長等於一長列相同的磁磚所構成的矩形之對角線長的三分之一。已知每片磁磚的周長為 24 cm，請問這一長列磁磚共有多少片？
- (A) 3      (B) 6      (C) 9      (D) 12      (E) 15
- 
20. 在  $\triangle PQR$  中， $\angle R = 2\angle P$ 、 $PR = 5$ 、 $QR = 4$ ，請問  $PQ$  之長是什麼？
- (A)  $2\sqrt{10}$       (B) 6      (C) 7      (D)  $2\sqrt{7}$       (E)  $5\sqrt{2}$
- 

### 21-25 題，每題 5 分

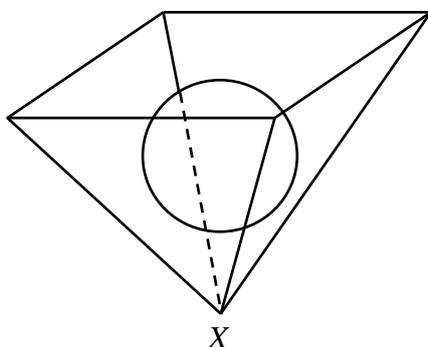
21. 令  $p(x)$  為一多項式使得

$$p(x) = (x-2)^{2012}(x+2012) + (x-2)^{2011}(x+2011) + \cdots + (x-2)(x+1)$$

請問  $p(x)$  的各項係數之總和是什麼？

- (A) 1006      (B) 2012      (C) 2027090      (D) 0      (E) 1
- 
22. 在一個圓周上標記十二個點，將連接任意二點的所有弦都畫出。如果有一對弦互不相交且沒有共同的端點，我們稱它們為一組「不相干」的弦對。請問在此圓上共有多少組「不相干」的弦對？
- (A) 132      (B) 210      (C) 495      (D) 990      (E) 1485
- 
23. 若  $x$ 、 $y$  為正整數且滿足  $x^2 - 8x - 1001y^2 = 0$ ，請問  $x+y$  的極小值是什麼？
- (A) 73      (B) 100      (C) 102      (D) 114      (E) 136
-

24. 一個半徑為 1 的球體停留在一個倒立的四角錐狀容器內。這個倒立的四角錐的頂部是一個在水平上的正方形且它的每個側面都是正三角形。它的大小足以將這個球整個包含在內部。



請問這個球的球心與四角錐的頂點  $X$  之距離為多少？

- (A)  $\sqrt{2}$       (B)  $\frac{3}{2}$       (C)  $3-\sqrt{2}$       (D)  $\sqrt{3}$       (E) 2

25. 在“-2”進位制中，它的數碼只有 0 和 1，它的各個位數代表-2的冪次。例如 110110 表示：

$$1 \times (-2)^5 + 1 \times (-2)^4 + 0 \times (-2)^3 + 1 \times (-2)^2 + 1 \times (-2) + 0 \times 1 = -14$$

若將十進制裡的數 2000 表示成“-2”進位制，請問其中共有多少個數碼不是 0？

- (A) 3      (B) 4      (C) 5      (D) 6      (E) 7

**問題 26~30 的答案為 000~999 之間的整數，  
請將答案填在答案卡上對應的位置。**

**第 26 題佔 6 分，第 27 題佔 7 分，第 28 題佔 8 分，  
第 29 題佔 9 分，第 30 題佔 10 分。**

26. 某家快遞公司的每輛摩托車加滿油後都可行駛 300 km。有 A、B 兩位員工從貨倉一起出發送貨到 C 的家。途中的任何時刻只允許他們停下來從 A 的摩托車油箱抽一些油注入 B 的摩托車油箱中。途中 A 可在某地休息等候，而 B 則繼續送貨，最後再一起與 A 同時回到貨倉。請問 C 的家最遠可距離貨倉多遠？
27. 在一個圓周上有二十八個間距都相等的點。在這二十八個點中挑選三個點構成一個三角形使得它的一個內角是另一個內角的两倍，請問這樣在不同位置的三角形總共有多少個？

28. 我們打算在下列方格表中的每個小方格內都填入一個數(角落已填上數)，使得除了在角落的小方格外，每個小方格內的數都等於與此小方格相鄰的小方格內的數之平均值。方格表邊緣上的小方格各有三個相鄰的小方格，而其他的則有四個。

+1000				-1000
	$x$			
-1000				+1000

請問在標記  $x$  的小方格內所填入的數是什麼？

29. 泰勒發明一種方法來擴展一組數。例如將一組數  $[1, 8]$  泰勒化，則可造出兩組數  $[2, 9]$  與  $[3, 10]$ ，它們的每一項都由前組數的每一項各加 1 而得，再將這三組數依序合併在一起而得另一組數  $[1, 8, 2, 9, 3, 10]$ 。若他由只有一個數  $[0]$  的這組數開始，不斷地將它泰勒化，則可得一組數：

$[0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, \dots]$ 。

請問這組數中的第 2012 個數是什麼？

30. 已知  $\sin x \cos x + \sin y \cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$  且  $\cos(x - y)$  的可能值為最小，請問  $2x - y$  的度數最接近  $360^\circ$  的值是什麼？

\*\*\*