TRML 個人賽-2011 第一回

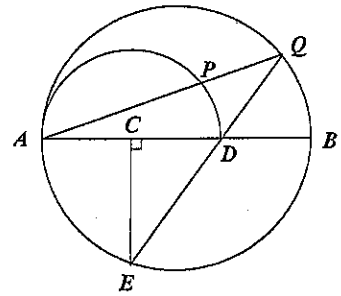
I-1. 設有一個三位數能被 35 所整除，且各位數字之和為 15，則此三位數為____。

答：735

I-2. 設 a 、 b 、 c 是三實數，滿足 $a+b+c=9$ ， $ab+bc+ca=0$ ，則 $a+b$ 的最大值為 ____ 。

答：12

I-3. 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑畫一圓， C 、 D 兩點在 $\overline{AB}$ 上，使得 $\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB}$ ， Q 、 E 兩點在圓周上使得 Q 、 D 、 E 三點共線且 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ ，再以 $\overline{AD}$ 為直徑在圓內部畫一半圓，設 $\overline{AQ}$ 交此小半圓於 P 點。若 $\overline{AB}=9$ ，則 $\overline{PQ}=$ ______ 。



答： $2\sqrt{2}$

TRML 個人賽-2011 第二回

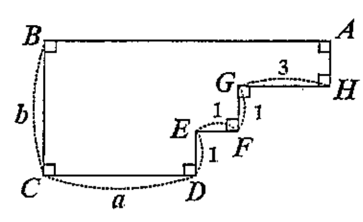
I-4. 滿足方程式 $\frac{5}{4x}+\frac{4}{5y}=\frac{1}{20}$ 的所有正整數對 (x,y) 共有 ____ 組數對。

答：15

I-5. 滿足 $3x^2-8[x]+2=0$ 最大的實數 x 為____。(其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數)

答： $\frac{\sqrt{42}}{3}$

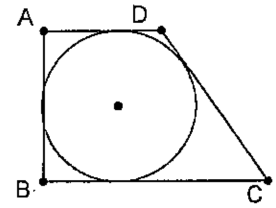
I-6. 如圖，已知 $ABCDEFGH$ 之面積為 11 平方公分，若 a 及 b 均為正整數，則 $a+b=$ ____ 。



答：5

TRML 個人賽-2011 第三回

I-7. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AD}$，且設此梯形有一個半徑等於 1 的內切圓。若梯形 $ABCD$ 的面積等於 7，則 $\overline{DC}=$ ____ 。



答：5

I-8. 假設 X 和 Y 是相互獨立的隨機變數，X 只取 1，2 兩個數值，Y 只取 1，3 兩個數值。若事件 $X=1$ 的機率是 0.7，且事件 $Y=1$ 的機率是 0.4，則變數 $Z=Y-X$ 的數學期望值為____。

答：~~0.3~~ 0.9

I-9. 考慮所有滿足 $\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_{2011}=2012 \\ \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2011}}=2012 \end{cases}$ 的 2011 個正數 $a_1, a_2, \cdots, a_{2011}$，則對於 $i=1,2,\cdots,2011$，$a_i+\dfrac{1}{a_i}$ 的最大值為 _____ 。

答：$\dfrac{8045}{2012}$

TRML 個人賽-2011 第四回

I-10. 若 ΔABC 與 ΔDEF 的三內角分別為 $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ 及 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$，其外接圓的半徑分別為 5 及 2，則 ΔABC 與 ΔDEF 的面積之比值為 ______ 。

答：$\dfrac{25\sqrt{3}}{12}$

I-11. 從 1 到 35 的 35 個正整數中選取某些數形成一些集合，使得每個集合中最大的數恰為此集合中其餘所有的數之乘積。如果 1 到 35 的每一個數至多只能出現在某一個集合中，則至多能造個這樣的集合。

答：4

I-12. 在 k 為整數且滿足 $\begin{cases} 2x+ky=6 \\ 3x+2y+12k=0 \end{cases}$ 之解 x, y 均為正整數的條件下，k 的最小值為 ____ 。

答：-7

TRML 接力賽-2011 第一回

《第一回第一棒》

R1-1

已知 n 與 $\sqrt{4n^2+113}$ 都是正整數，則 n 之值為何？

答：28

《第一回第二棒》

R1-2

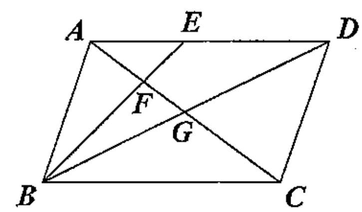
設 T＝前一位隊友傳來的答案。某等差數列共有 m 項，已知此數列前三項的和為 10，末三項的和為 50，且這 m 項的和為 $5T$，則 $m=$？

答：14

《第一回第三棒》

R1-3

設 T＝前一位隊友傳來的答案。如圖，$ABCD$ 為平行四邊形，E 為 $\overline{AD}$ 上一點，且 $\overline{AE}:\overline{ED}=2:3$，$\overline{AC}=T$，試求 $\overline{FG}=$？



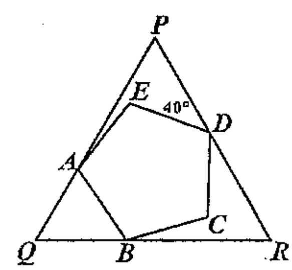
答：3

TRML 接力賽-2011 第二回

《第二回第一棒》

R2-1

如圖，ΔPQR 為正三角形，正五邊形 $ABCDE$ 的頂點 A、B 及 D 分別在邊 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$ 及 $\overline{RP}$ 上，且 $\angle PDE=40^\circ$，若 $\angle CBR=x^\circ$，則 $x=$？



答：16

《第二回第二棒》

R2-2

設 T＝前一位隊友傳來的答案。設實數值函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$，試求 $f(T)=$？

答：261

《第二回第三棒》

R2-3

設 T＝前一位隊友傳來的答案。從 a, b, c, d, e, f 六數中，任取三數並計算它們的和，一共有 20 個和，這 20 個和的算數平均數為 T，則 $a+b+c+d+e+f=$？

答：522

TRML 團體賽-2011

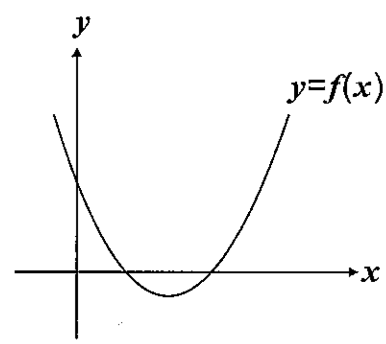
1. 設有一數列$\{a_n\}$，已知$a_1=7$，且對$n=2,3,4,\cdots$滿足$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$，則$a_{100}=$______ 。

2. 假設a，b，c為常數。若多項式$ax^4+bx^3+c(x^2+x-2)$被$x+1$除之餘式是27，被$(x-1)^2$除之餘式是$-4x+7$，則三元組$(a,b,c)=$ ______ 。

3. 設$f(n)=(n+1)\times 0.91^n$，其中n為正整數，則使得$f(n)$值為最大的$n=$ ______ 。

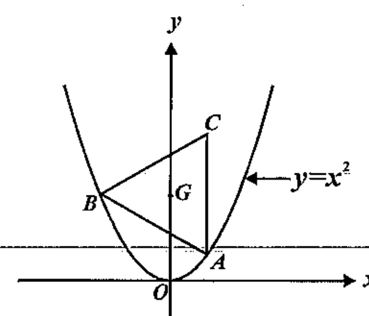
4. 設a、b為正整數，且所有實數x都滿足$\left|\dfrac{2ax-b}{2x^2-8x+9}\right|<1$，則$a+b=$ ______ 。

5. 已知圓內接六邊形$ABCDEF$的 6 邊之長依序為 4, 4, 6, 6, 4, 6，則此六邊形$ABCDEF$之面積為______ 。



6. 設f,g均為二次函數，若方程式$f(g(x))=0$有 3、1、4 及p四個實根，則p之最大值為 ______ 。

7. 在坐標空間中，已知球面$S:x^2+y^2+z^2=6$，平面$E:3x+4y+5z=10$相交於一圓為C，則點$P(6,3,6)$與圓C上的點之最短距離為________ 。



8. 如圖，正三角形ABC中，兩頂點A及B皆在拋物線$y=x^2$上，ΔABC的重心G在y軸上，邊$\overline{AC}$與y軸平行。若點A的x坐標為$a\,(a>0)$，則$a=$ ____ 。

9. 已知數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 滿足 $a_{k+1}=a_k+3\log 2$ 或 $a_{k+1}=a_k+\log 5$ 或 $a_{k+1}=a_k-2$ 三者之一，$k=1,2,3,\cdots,n-1$，且$a_n=a_1$。若 $n>100$ ，則正整數n的最小值為________ 。

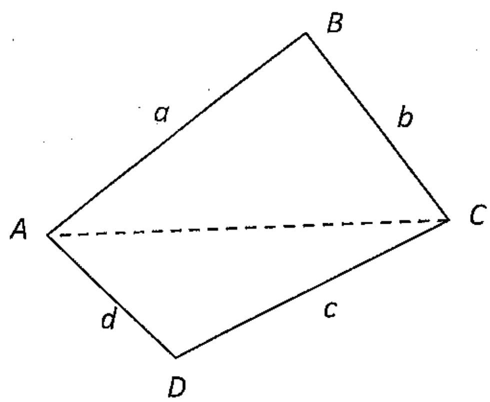
10. 有 15 個正整數$a_1,a_2,\cdots,a_{14},a_{15}$滿足$a_1<a_2<\cdots<a_{14}<a_{15}$且$\sum_{i=1}^{15}a_i^2\le 2011$，則$a_{12}-a_7$可以達到的最大值為_______ 。

TRML 思考賽-2011

思考賽共 11 題(含第 11 題加分題)，每題均為 4 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。
准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

任意三角形的兩邊長之和大於第三邊，此三角不等式對四邊形也有類似的結果：
若四邊形 $ABCD$ 的四邊長度分別為 a,b,c,d ，則

$$a<b+c+d\ ,b<c+d+a\ ,c<d+a+b\ ,d<a+b+c。\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$



其理由如下：(如圖所示)

利用三角不等式，即可推得 $b+c+d=b+(c+d)>b+\overline{AC}>a$。

同理可證，其他的不等式也都成立。

反之，我們也知道：當正數 a,b,c,d 滿足不等式(*)時，一定也存在四邊形 $ABCD$，其四邊的長度依序為 a,b,c,d 。事實上，這種四邊形不是唯一的，但其中必有一個四邊形的頂點 A, B, C, D 共圓(即四邊形 $ABCD$ 有一外接圓)，此性質在以下的問題(1)~(3)中將被要求給出一種證明，**請依序作答**。

(1) 已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且 $\overline{AB}=4,\overline{BC}=3,\overline{CD}=2,\overline{DA}=1$，試求 $\cos B$ 之值。

(2) 已知正數 a,b,c,d 依順時針方向可以作為某圓內接四邊形的四邊長度。試證：

不論 a,b,c,d 的順序如何(即 a,b,c,d 的任意重排)，也都可以作為某圓內接四邊形的四邊長度。

(3) 已知 a,b,c,d 都是正數，滿足 $a\geq b,a\geq c,a\geq d$ 且 $a<b+c+d$ 。試證：可以作出一圓內接四邊形 $ABCD$，使其四邊的長度分別為 a,b,c,d 。

以下的問題中，我們要進一步探討的問題是：給定正整數 $n\geq 4$，會有多少種不同的圓內接四邊形，其周長等於 n，且四邊的長度都是**正整數**？首先，我們以 $[a,b,c,d]$ 表示 a,b,c,d 由左而右

排成一列的直線排列，以(a,b,c,d)表示a,b,c,d依順時針方向排成一圓形的環狀排列；並考慮以下兩個條件：

(i) $a+b+c+d=n$，

(ii) a,b,c,d都是正整數，且為某圓內接四邊形的四邊長。

接著，我們定義兩個函數$f(n)$及$g(n)$如下：

(甲) 函數$f(n)$表示滿足條件(i)及(ii)的直線排列$[a,b,c,d]$之個數；

(乙) 函數$g(n)$表示滿足條件(i)及(ii)的環狀排列(a,b,c,d)之個數。

例如：將$\{3,2,2,1\}$由左而右排成一列的直線排列有$\frac{4!}{1!2!1!}=12$種，但這12種排列若依順時針方向排成一圓形的環狀排列時，就只能計算以下的3種排法：

$$(3,2,2,1),\ (3,2,1,2),\ (3,1,2,2)\text{。}$$

就幾何意義而言，$f(n)$就是周長等於n且為整數邊長的圓內接四邊形之個數；而$g(n)$就是這$f(n)$種圓內接四邊形中，在旋轉後相同者視為同一種的四邊形之個數。舉例來說，當$n=4$時，滿足條件的四邊形僅有邊長為1的正方形，故直線排列只有一種，即$[a,b,c,d]=[1,1,1,1]$，得知$f(4)=1$。同樣的，環狀排列也只有一種，即$(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$，故$g(4)=1$。又如$n=5$時，滿足條件$a+b+c+d=5$的四邊形之邊長有以下4種不同的直線排列：

$$[a,b,c,d]=[2,1,1,1],[1,2,1,1],[1,1,2,1],[1,1,1,2]\text{，}$$

因此，$f(5)=4$。但這4種直線排列依順時針方向排成圓形時都屬於同一種環狀排列，即$(a,b,c,d)=(2,1,1,1)=(1,2,1,1)=(1,1,2,1)=(1,1,1,2)$；於是可得：$g(5)=1$。

請依序作答以下的問題(4)~(10)及加分題(11)：

(4) 試分別求$f(6)$及$g(6)$之值，並說明理由。

(5) 試分別求$f(7)$及$g(7)$之值，並說明理由。

(6) 給定正整數n,k，其中$n\le 2k$。試問有多少組正整數解a,b,c,d同時滿足以下兩條件：(1) $a+b+c+d=n$，(2) $a\ge k$。

(7) 給定正整數n,k，其中$n\le 2k$。設$P(n,k)$表示同時滿足以下兩條件的正整數解a,b,c,d的個數：

(1) $a+b+c+d=n$，(2) $a<k,\ b<k,\ c<k,\ d<k$。

試求$P(n,k)$的一般式，並說明理由。

(8) 試求$f(2k)$的一般式，其中$k\ge 2$，並說明理由。

(9) 試求$f(2k+1)$的一般式，其中$k\ge 2$，並說明理由。

(10) 試求$g(4k)$的一般式，其中$k\ge 1$，並說明理由。

【加分題】

(11) 試求$g(n)$的一般式，其中$n\ge 4$，並說明理由。