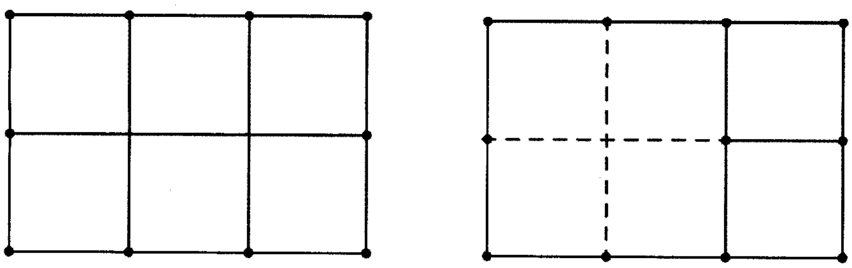
TRML 思考賽-2010

思考賽共 11 題，第 1 至第 10 題每題 4 分，第 11 題 8 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。

准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

【第一部份】(第 1 至第 5 小題)

將一個邊長分別為正整數 m 及 n 的矩形分割成若干個邊長均為正整數的正方形，每個正方形的邊均平行於原來矩形的邊；我們以 $f(m,n)$ 表示這些正方形邊長和的最小值。例如：邊長分別為 3 及 2 的矩形有以下兩種分割方式：



(圖一) (圖二)

(圖一)中，六個正方形的邊長和等於 $1+1+1+1+1+1=6$；

(圖二)中，三個正方形的邊長和等於 $2+1+1=4$；

邊長和的最小值等於 4，所以 $f(3,2)=4$。

1. 試求 $f(6,2)$ 之值，並說明理由。

2. 試求 $f(5,3)$ 之值，並說明理由。

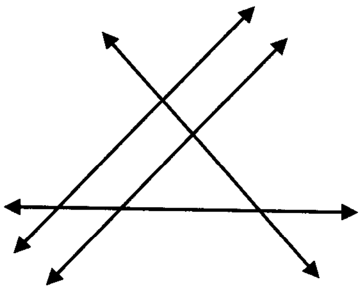
3. 試求 $f(6,4)$ 之值，並說明理由。

4. 試求 $f(m,2)$ 之值，並說明理由。

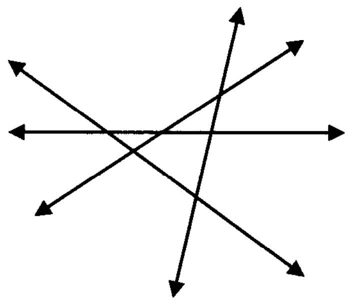
5. 試求 $f(m,n)$ 之值(以 m, n 表示)，並說明理由。

【第二部份】(第 6 至第 11 小題)

假設平面上有m條的直線、n個交點，其中任意三條直線都不共點。顯然，交點數n不能超過$\dfrac{m(m-1)}{2}$；當$n=0$時，表示這m條直線是一組平行線；當$n=\dfrac{m(m-1)}{2}$時，表示這m條直線互不平行。已知平面上可畫出m條直線、n個交點(其中任意三條直線都不共點)的圖形不只一種，但不論圖形如何，平面被分割成的區域個數都是固定的(亦即區域個數與圖形的畫法無關)；設$g(m,n)$表示平面被分割成的區域個數，其中有界的區域個數為$h(m,n)$，而由交點所截開的線段個數為$S(m,n)$。例如：



(圖三)



(圖四)

(圖三)中，$m=4$，$n=5$，$g(4,5)=10$，$h(4,5)=2$，$S(4,5)=6$；
(圖四)中，$m=4$，$n=6$，$g(4,6)=11$，$h(4,6)=3$，$S(4,6)=8$。

6. 試求$g(5,10)$之值，並說明理由。
7. 試求$g(6,11)$之值，並說明理由。
8. 試求$g(m,n)$之值(以m,n表示)，並說明理由。
9. 若這m條直線不全平行，試求$h(m,n)$之值(以m,n表示)，並說明理由。
10. 若這m條直線不全平行，試求$S(m,n)$之值(以m,n表示)，並說明理由。
11. 設平面上可畫出m條相異的直線、n個交點，其中任意三條直線都不共點。試證：不論圖形如何，$S(m,n)$均為固定的值(亦即截線段的個數與圖形的畫法無關)。

TRML 思考賽參考解答-2010

1	$f(6,2)=6$
2	$f(5,3)=7$
3	$f(6,4)=8$
4	$f(m,2)=m+2-\gcd(m,2)$
5	$f(m,n)=m+n-\gcd(m,n)$
6	$g(5,10)=16$
7	$g(6,11)=18$
8	$g(m,n)=m+n+1$
9	$h(m,n)=n-m+1$
10	$S(m,n)=2n-m$
11	證略

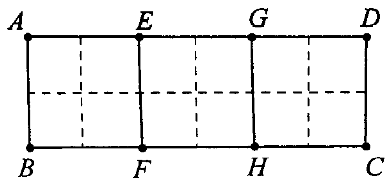
2010 TRML 思考賽參考解答

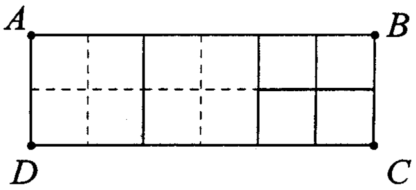
【第一部份】

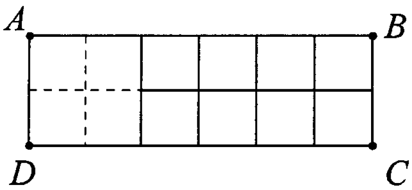
在 1~5 題中，各題最佳的分割方式均是考慮分割出的正方形數目越少越好(即分割出的正方形越大越好). 例如: 將一個$t \times t$的正方形分割成若干個$s \times s$較小的正方形時，則$s \mid t$. 此時，這些正方形邊長和等於$s \times \dfrac{t}{s} \times \dfrac{t}{s} = t \times \dfrac{t}{s} > t = f(t,t)$ (因為$\dfrac{t}{s} > 1$). 其他分割成若干個大小不同的小正方形時，也一樣能證明這些正方形邊長和大於t。若能說明以上理由，則可簡化解題過程。

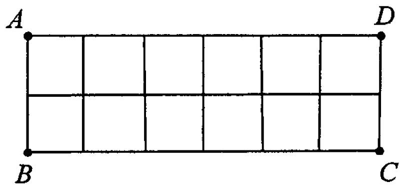
1. $f(6,2)=6$

如圖所示，對於6×2的矩形$ABCD$，可分割出 3 個2×2的正方形；或分割成 2 個2×2的正方形，與 4 個1×1的正方形；或分割成 1 個2×2的正方形，與 8 個1×1的正方形；或分割成 12 個1×1的正方形.





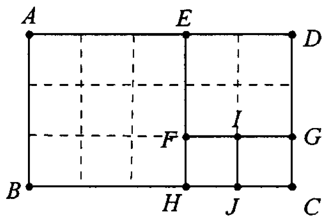


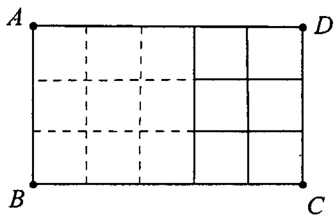


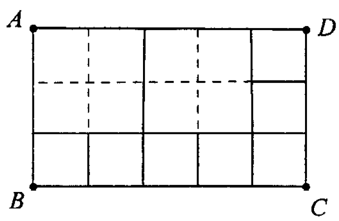
以上圖形中已經省了略對稱、鏡射、翻轉及其他等價的情形。
所以，這些正方形的邊長和之最小值$f(6,2)=2+2+2=6$。

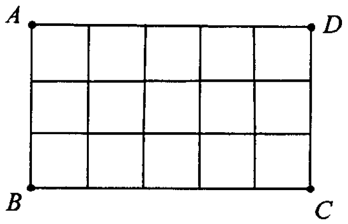
2. $f(5,3)=7$

如圖所示，對於5×3的矩形$ABCD$，可分割成一個3×3的正方形，一個2×2的正方形，與兩個1×1的正方形；一個3×3的正方形，與 6 個1×1的正方形，2 個2×2的正方形，與 7 個1×1的正方形；或 15 個1×1的正方形。





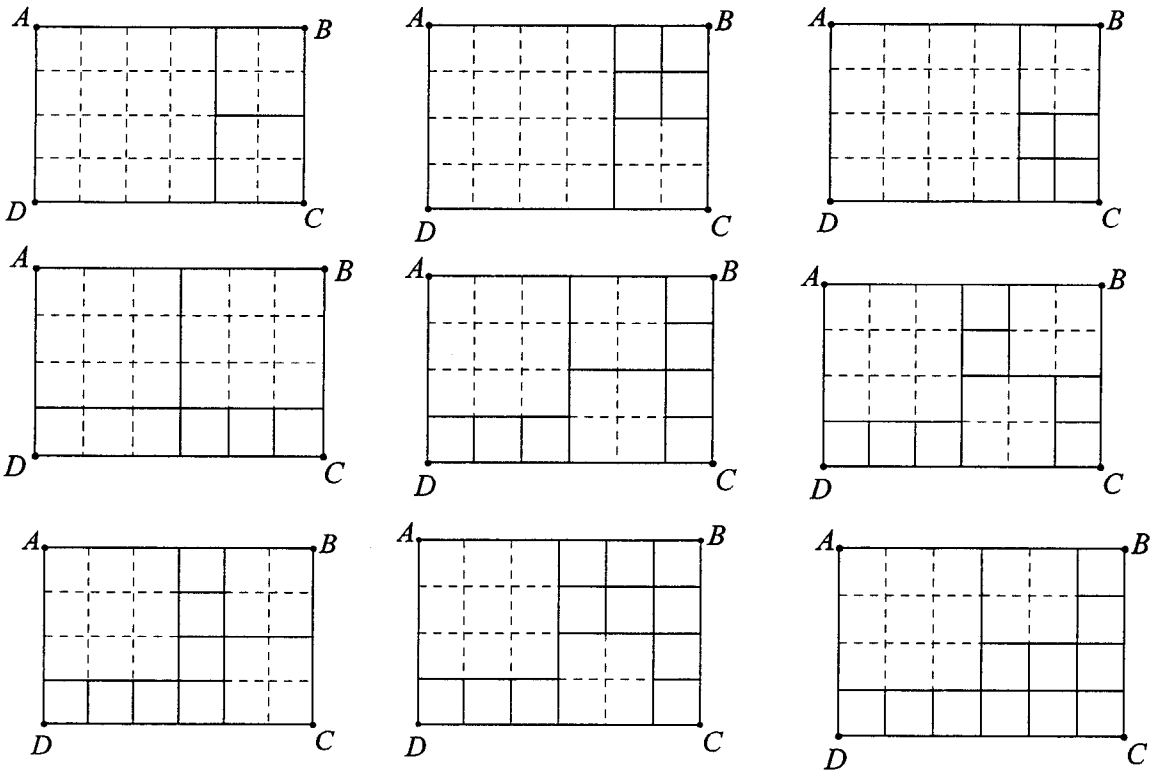


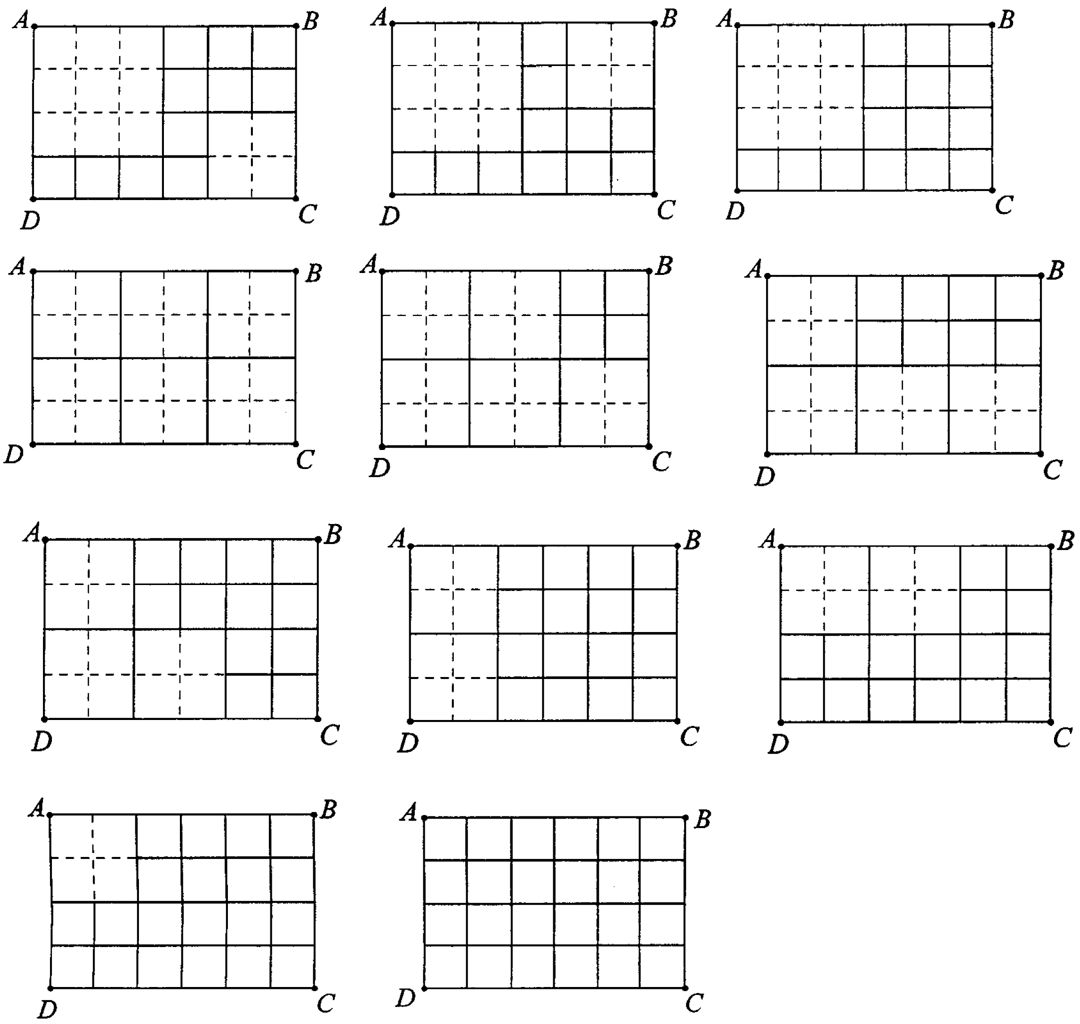


此時，這些正方形的邊長和之最小值 $f(5,3)=3+2+1+1=7$。(事實上，$f(5,3)=3+f(2,3)=7$。)

3. $f(6,4)=8$

如圖所示，對於6×4的矩形 $ABCD$，可分割出 1 個4×4的正方形，與 2 個2×2的正方形；或 1 個4×4的正方形，1 個2×2的正方形，與 4 個1×1的正方形；或 2 個3×3的正方形，與 6 個1×1的正方形；或 1 個3×3的正方形，2 個2×2的正方形，與 7 個1×1的正方形；或 1 個3×3的正方形，1 個2×2的正方形，與 11 個1×1的正方形；或 1 個3×3的正方形，與 15 個1×1的正方形；或 6 個2×2的正方形；或 5 個2×2的正方形，與 4 個1×1的正方形；或 4 個2×2的正方形，與 8 個1×1的正方形；或 3 個2×2的正方形，與 12 個1×1的正方形；或 2 個2×2的正方形，與 16 個1×1的正方形；或 1 個2×2的正方形，與 20 個1×1的正方形；或 24 個1×1的正方形。





以上圖形中已經省了略對稱、鏡射、翻轉及其他等價的情形。
此時，這些正方形的邊長和之最小值 $f(6,4)=4+2+2=8$。

4. 我們將證明：$f(m,2)=m+2-\gcd(m,2)=\begin{cases} m+1 & \text{當}m\text{為奇數} \\ m & \text{當}m\text{為偶數} \end{cases}$。

如果 $m=1$，則此矩形只能分割成兩個 1×1 的正方形，而此時

$$\text{邊長和}=m+1=2=1+2-\gcd(1,2)\text{。}$$

設 $m\geq 2$。如圖所示，對於 $m\times 2$ 的矩形 $ABCD$，若 2 可以整除 m，則此矩形最佳可分割成 $\dfrac{m}{2}$ 個 2×2 的正方形，此時

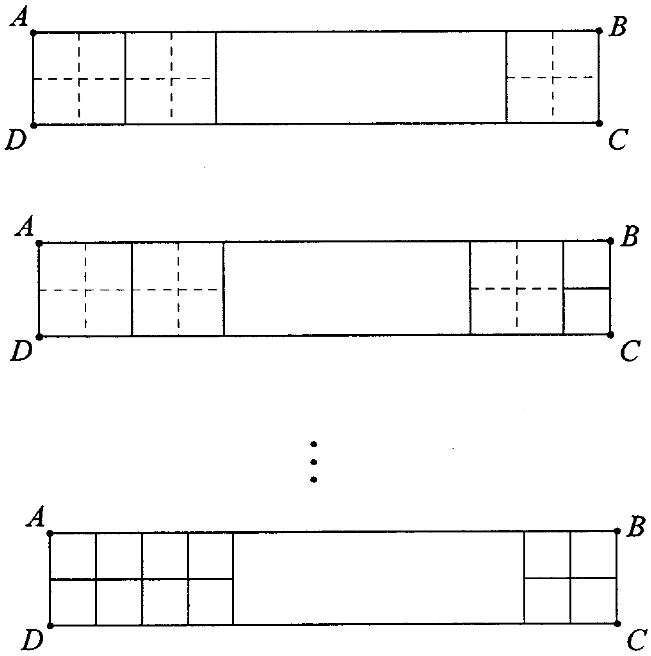
$$\text{邊長和}=2\times\frac{m}{2}=m=m+2-\gcd(m,2)\text{。}$$

若 2 不能整除 m，則此矩形最佳可分割成 $\left[\dfrac{m}{2}\right]$ 個 2×2 的正方形，及兩個 1×1 的正方形，此時

$$\text{邊長和} = 2\times\left[\frac{m}{2}\right]+2 = m-1+2 = m+1 = m+2-\gcd(m,2)\text{。}$$

若將此矩形全都分割成1×1的正方形，則此時

$$\text{邊長和} = 2\times m \geq m+2-\gcd(m,2)\text{。}$$



因此，$f(m,2) = m+2-\gcd(m,2)$。

5. 我們將證明

$$f(m,n) = m+n-\gcd(m,n)\text{。} \qquad (*)$$

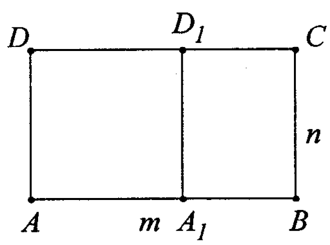
不妨設$m \geq n$，我們將對 m 以數學歸納法證明(*)成立。

(1) 首先，我們對 m 作歸納證明存在一種合乎題意的分法，使得這些正方形邊長之和恰為$m+n-\gcd(m,n)$。

顯然當$m=1$時，命題成立。

假設當$m \leq k \quad (k>1)$時結論成立.

當$m=k+1$時，若$n=k+1$，則命題顯然成立. 若$n<k+1$，從矩形 $ABCD$ 中切去正方形AA_1D_1D，如圖所示.



由數學歸納法之假設知矩形 D_1A_1BC 有一種分法使得所得正方形邊長之和恰為$(m-n)+n-\gcd(m-n,n) = m-\gcd(m,n)$，因而矩形 $ABCD$ 有一種分法使得所得正

方形邊長之和恰為$m+n-\gcd(m,n)$。

(2) 其次，我們對 m 作歸納證明(*)成立。

當$m=1$時，$n=1$，顯然$f(m,n)=1=m+n-\gcd(m,n)$.

假設當$m\le k$ $(k>1)$，$1\le n\le m$時，$f(m,n)=m+n-\gcd(m,n)$都成立.

當$m=k+1$時，若$n=k+1$，則$f(m,n)=k+1=m+n-\gcd(m,n)$.

若$1\le n\le k$，設矩形 $ABCD$ 按規定分成p個正方形，其邊長分別為a_1，a_2，…，a_p.

不妨設$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_p$. 顯然$a_1=n$或$a_1<n$.

若$a_1<n$，則每一行至少有兩個分割的正方形橫跨，因此，$a_1+a_2+\cdots+a_p$之和不小於$\overline{AB}$與$\overline{CD}$之和，故

$$a_1+a_2+\cdots+a_p\ge 2m>m+n-\gcd(m,n).$$

若$a_1=n$，則表示有一個$n\times n$的分割正方形及一個邊長分別為$m-n$及n的矩形，它被分割成邊長分別為a_2，…，a_p的正方形，由數學歸納法假設

$$a_2+a_3+\cdots+a_p\ge(m-n)+n-\gcd(m-n,n)=m-\gcd(m,n)，$$

從而$a_1+a_2+\cdots+a_p\ge m+n-\gcd(m,n)$,

即當$m=k+1$時，$f(m,n)\ge m+n-\gcd(m,n)$成立.

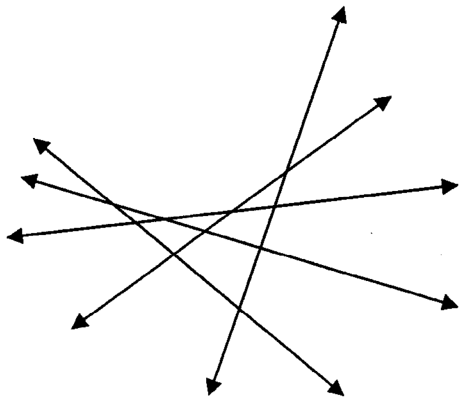
由(1)及(2)可知$f(m,n)=m+n-\gcd(m,n)$成立。

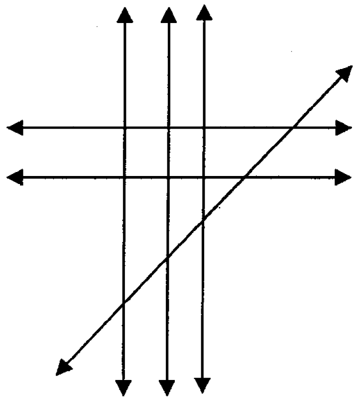
2010 TRML 思考賽參考解答

【第二部份】

6. $g(5,10)=16$

交點數 $n=10=C_2^5$ 表這 5 條直線互不平行，此時 $f(5,10)$ 恰等於 5 條直線最多可分割平面的區域數，如下圖左：共有 $1+1+2+3+4+5=16$ 個區域，因此，$g(5,10)=16$。





7. $g(6,11)=18$

交點數 $n=11<C_2^6$ 表這 6 條直線中有平行線，其可能情形列表如下：

平行線分組	6	5,1	4,2	3,3	4,1,1	3,2,1	2,2,2	3,1,1,1	2,2,1,1	2,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1
n	0	5	8	9	9	11	12	12	13	14	15

僅有3,2,1的平行線分組，才能得到交點數 $n=11$。如上圖右所示：共有 18 個區域，因此，$g(6,11)=18$。

8. $g(m,n)=m+n+1$

設此 m 條直線可分成 r 組平行線，各組分別有 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 條直線，其中 $k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_r$，則直線數 $m=k_1+k_2+\cdots+k_r$，交點數 $n=\sum_{i<j}k_ik_j$，而區域數 $g(m,n)$ 可以計算如下：

第 1 組 k_1 條平行線可以將平面分成 k_1+1 個區域，

第 2 組 k_2 條平行線加入後，可增加 $k_2(k_1+1)$ 個區域，

第 3 組 k_3 條平行線加入後，可再增加 $k_3(k_2+k_1+1)$ 個區域，

……………………………………

第 r 組 k_r 條平行線加入後，可再增加 $k_r(k_{r-1}+k_{r-2}+\cdots+k_1+1)$ 個區域。

因此，

$$\begin{aligned} g(m,n) &= (k_1+1)+k_2(k_1+1)+k_3(k_2+k_1+1)+\cdots+k_r(k_{r-1}+k_{r-2}+\cdots+k_1+1) \\ &= \sum_{i=1}^{r}k_i+\sum_{i<j}k_ik_j+1=m+n+1 \text{。} \end{aligned}$$

【另證】對 m 用數學歸納法，可以證明： $g(m,n)=m+n+1$。

當 $m=1$ 時， $n=0$ ，得到 $g(1,0)=2$ ；此時， $g(m,n)=2=m+n+1$ 成立。

假設此命題對 m 條直線的情形都成立，並考慮 $m+1$ 條直線的情形，設其交點數為 n^*，則區域數 $g^*=g(m+1,n^*)$。我們可以任取其中一條直線 L ，並設與 L 平行的直線恰有 k 條，則其餘的 $m-k$ 條直線都與 L 各交一點，故直線 L 上的交點數為 $m-k$。當我們從這 $m+1$ 條直線中去掉直線 L 後，剩下的 m 條直線之交點數為 $n=n^*-(m-k)$，依歸納法的假設，此時的區域數為

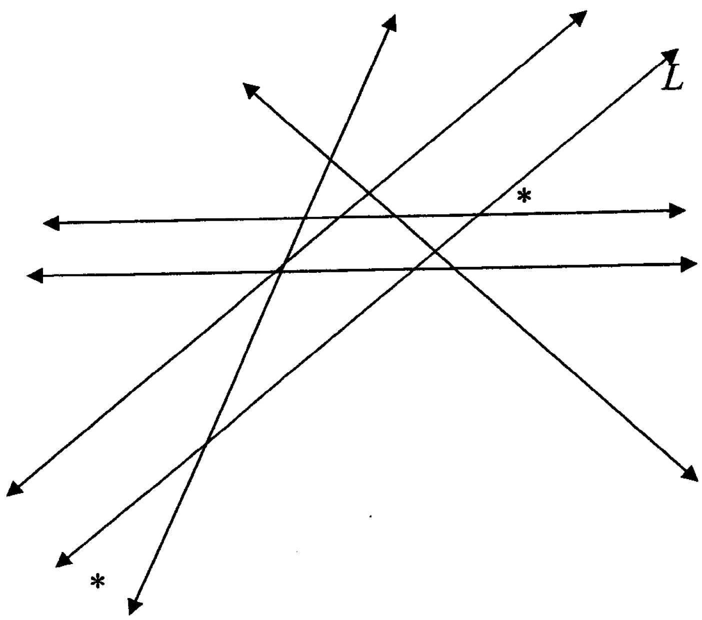
$$g(m,n)=m+n+1=m+(n^*-m+k)+1=n^*+k+1 \text{。}$$

另一方面，去掉直線 L 後，區域數恰好減少 $m-k+1$ 個，故 $g(m,n)=g^*-(m-k+1)$。

因此，

$$g^*=g(m,n)+(m-k+1)=(n^*+k+1)+(m-k+1)=(m+1)+n^*+1 \text{。}$$

亦即 $g(m+1,n^*)=(m+1)+n^*+1$，故由數學歸納法，得知本命題成立。



9. $h(m,n)=n-m+1$

注意：這 m 條直線不全平行，則有 $n\geq m-1$。以下我們先用數學歸納法證明：無界區域的個數恰為 $2m$。設 a_m 表 m 條直線時無界的區域數，則 $a_1=2$。假設 $a_m=2m$，並考慮不全平行的 $m+1$ 條直線，我們可任取其中一條直線 L，使 L 與其他 m 條直線不全平行。

(i) 若其餘的 m 條直線都平行，則這 $m+1$ 條直線所產生的無界區域數顯然為 $2(m+1)$，故 $a_{m+1}=2(m+1)$。

(ii) 若其餘的 m 條直線不全平行，則依歸納法的假設，這 m 條直線所產生的無界區域數 $a_m=2m$。此時加入直線 L 後，可以發現恰好增加 2 個無界的區域，如上圖所示(*區域)。(事實上，直線 L 所經過的區域中，在最外側兩端的無界區域每一個都會被 L 切成 2 個無界區域；至於 L 所通過的內側情形，每一個有界封閉區域都會被切成 2 個有界封閉區域，而每一個無界區域都會被切成 1 個有界封閉區域及 1 個無界區域)。因此，這 $m+1$ 條直線產生的無界區域數為

$$a_{m+1}=a_m+2=2(m+1)。$$

故由數學歸納法，得知本命題成立。於是，

$$h(m,n)=g(m,n)-2m=(m+n+1)-2m=n-m+1。$$

10. $S(m,n)=2n-m$

利用尤拉公式：在一個平面圖中，

(頂點數) － (線段數) ＋ (有界的封閉區域數) $=1$，

即 $n-S(m,n)+h(m,n)=1$，由此可得：

$$S(m,n)=n+h(m,n)-1=n+(n-m+1)-1=2n-m。$$

11. 當 $n=0$ 時，這 m 條直線是一組平行線，此時，$S(m,n)=0$。

當 $n\geq 1$ 時，這 m 條直線不全平行，此時 $n\geq m-1$ 且 $m\geq 2$。在此情況下，可用數學歸納法證明：$S(m,n)=2n-m, \forall m\geq 2$。

當 $m=2$ 時，$n=1$，得到 $S(2,1)=0$；此時，$S(m,n)=0=2n-m$ 成立。

假設此命題對不全平行的 m 條直線的情形都成立，並考慮不全平行的 $m+1$ 條直線，設其交點數為 n^*，則線段數 $S^*=S(m+1,n^*)$。我們可任取其中一條直線 L，使 L 與其他 m 條直線不全平行，並設與 L 相交的直線恰有 k 條，即直線 L 上的交點數為 k，此時其餘的 m 條直線的交點數為 n^*-k。

(i) 若其餘的 m 條直線都平行，則這 $m+1$ 條直線所產生的交點數 $n^*=m$，而線段數等於 $m-1$，故 $S^*=S(m+1,n^*)=m-1=2n^*-(m+1)$。

(ii) 若其餘的 m 條直線不全平行，則依歸納法的假設，這 m 條直線所產生的線段數等於 $S(m,n^*-k)=2(n^*-k)-m$。此時加入直線 L 後，可以發現恰好增加 $2k-1$ 條線段(事實上，直線 L 經過有界封閉區域時，L 會把每一條線段切成 2 條線段，而通過無界區域的邊界時，L 會把每一條射線切成 1 條線段及 1 條射線)。因此，這 $m+1$ 條直線所產生的線段數

$$S^*=S(m,n^*-k)+(2k-1)=2(n^*-k)-m+(2k-1)=2n^*-(m+1)。$$

故由數學歸納法，得知本命題成立。於是，$S(m,n)=2n-m$ 對不全平行的 m 條直線的情形均成立。