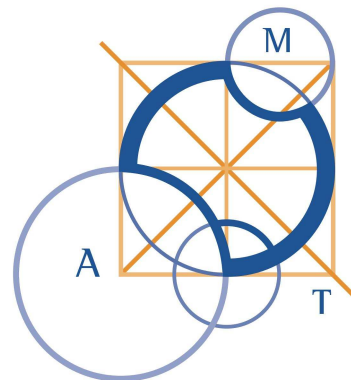


# AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION

AN ACTIVITY OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICS TRUST



**SATURDAY 7 AUGUST 2010**

## SENIOR DIVISION COMPETITION PAPER

高級卷（11—12 年級）

考試時間：75 分鐘

### 注意事項

#### 一般規定

1. 未獲監考老師許可之前不可翻開此測驗題本。
2. 各種通訊器材一律不得攜入考場，不准使用電子計算器、計算尺、對數表、數學公式等計算器具。作答時可使用直尺與圓規，以及兩面全空白的草稿紙。
3. 題目所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。
4. 最前 25 題為選擇題，每題有五個選項。最後 5 題要求填入的答案為 0 至 999 的正整數。題目一般而言是依照越來越難的順序安排，對於錯誤的答案不會倒扣分數。
5. 本活動是數學競賽而不同於學校測驗，別期望每道題目都會作。考生只與同地區同年級的其他考生評比，因此不同年級的考生作答相同的試卷將不作評比。
6. 請依照監考老師指示，謹慎地在**答案卡**上填寫您的基本資料。若因填寫錯誤或不詳所造成之後果由學生自行負責。
7. 進入試場後，須等待監考老師宣佈開始作答後，才可以打開題本進行答題。

#### 作答須知

1. 限用 B 或 2B 鉛筆填寫答案。
2. 請用 B 或 2B 鉛筆在答案卡上將您認為正確選項的圓圈塗滿（不是在題本上）。
3. 您的答案卡將由電腦閱卷，為避免電腦誤判，請不要在答案卡上其他任何地方塗劃任何記號。填寫答案卡時，若需要修改，可使用軟性橡皮小心擦拭，並確定答案卡上無殘留痕跡。

#### 特別約定

為確保競賽之公平性及認證成績優異學生，AMC 主辦單位保留要求考生重測之權利。

---

## 高級卷(11-12 年級)

---

### 1-10 題，每題 3 分

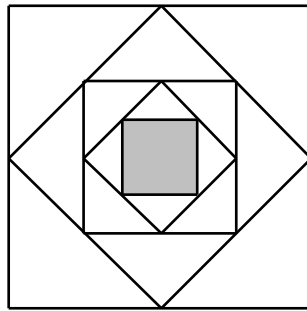
1. 算式  $2010 - 20.10$  等於  
(A) 1990.09 (B) 1990.9 (C) 1989.09 (D) 1989.9 (E) 1998.9
- 

2. 若  $m = 3$  且  $n = -\frac{3}{5}$ ，則  $\frac{m}{n}$  等於  
(A) -5 (B) 5 (C)  $-\frac{9}{5}$  (D)  $-\frac{5}{3}$  (E) 15
- 

3. 線段  $PQ$  的中點是  $M(-4, 6)$ 。已知點  $Q$  的座標是  $(10, 12)$ ，請問點  $P$  的座標是什麼？  
(A)  $(-18, 0)$  (B)  $(-18, 18)$  (C)  $(-10, 0)$  (D)  $(3, 9)$  (E)  $(3, 18)$
- 

4. 請問 63 是下列哪一個數的 87.5%？  
(A) 45 (B) 70 (C) 72 (D) 74 (E) 75
- 

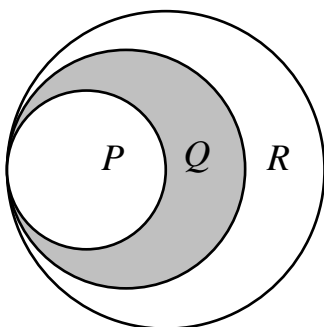
5. 請問圖中陰影部分的正方形面積佔整個大正方形面積的百分比為何？



- (A) 6.25% (B) 10% (C) 12.5% (D) 16% (E) 25%
- 

6. 有七個正整數 8、10、24、28、23、9、 $x$ ，它們的中位數與平均數都是  $x$ 。請問  $x$  之值是什麼？  
(A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21 (E) 23
-

7. 圓  $P$  之半徑等於圓  $Q$  之半徑的  $\frac{2}{3}$ ，而圓  $Q$  之半徑等於圓  $R$  之半徑的  $\frac{3}{4}$ 。



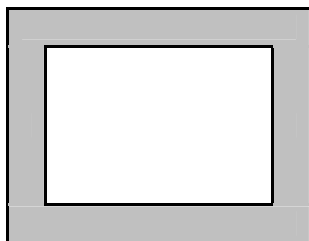
請問上圖中塗上陰影部分的面積佔圓  $R$  面積的幾分之幾？

- (A)  $\frac{1}{3}$       (B)  $\frac{5}{9}$       (C)  $\frac{1}{4}$       (D)  $\frac{3}{16}$       (E)  $\frac{5}{16}$

8. 連續投擲一枚骰子五次，請問沒有連續出現五次反面的機率是多少？

- (A)  $\frac{15}{16}$       (B)  $\frac{27}{32}$       (C)  $\frac{4}{5}$       (D)  $\frac{9}{10}$       (E)  $\frac{31}{32}$

9. 將一個矩形分割為  $x$  行  $y$  列個全等的小正方形。它的外圍塗上陰影部分都是佔 1 個正方形的寬度，且其面積佔整個矩形面積的一半。



請問  $x$  與  $y$  之和可能是多少？

- (A) 17      (B) 20      (C) 18      (D) 19      (E) 16

10. 將五個數  $x^3$ 、 $x^2$ 、 $x$ 、 $-x$ 、 $\sqrt{x}$  依照從小到大的順序排列，其中  $x$  之值為  $0 < x < 1$ ，請問位居中間的數是哪一個？

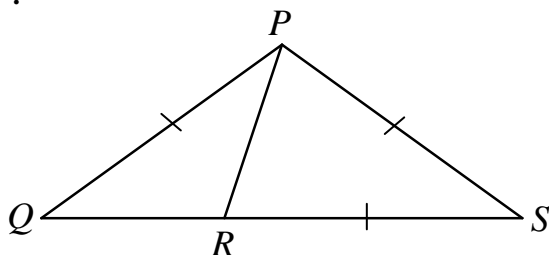
- (A)  $x^3$       (B)  $x^2$       (C)  $x$       (D)  $-x$       (E)  $\sqrt{x}$

### 11-20 題，每題 4 分

11. 對於所有的  $x$  值，算式  $\frac{7^{3x} + 7^{2x}}{7^{2x} + 7^x}$  等於？

- (A) 49      (B)  $7^{2x}$       (C) 7      (D)  $7^x$       (E) 1

12. 點  $R$  在三角形  $PQS$  的  $QS$  邊上，已知  $PQ = PS = SR$  且  $\angle QRP = \angle QPS$ 。請問  $\angle PSR$  等於多少度？



- (A) 30      (B) 36      (C) 45      (D) 60      (E) 70

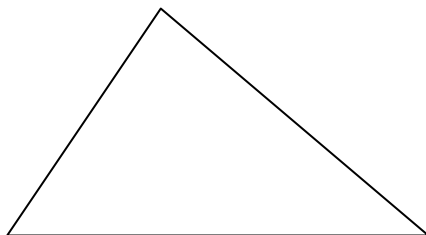
13. 若  $\frac{3a+4b}{2a-2b} = 5$ ，則  $\frac{a^2+2b^2}{ab}$  等於

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5

14. 算式  $123456785 \times 123456782 - 123456783 \times 123456784$  等於

- (A) -2      (B) -1      (C) 0      (D) 1      (E) 以上皆非

15. 類似下圖的三角形之每條邊長都是互不相同的質數，且它的周長也是個質數。



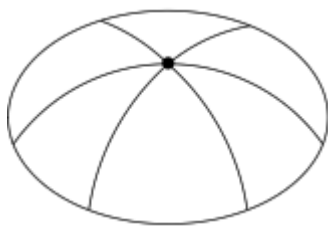
請問符合上述條件的三角形中最小的周長是多少？

- (A) 11      (B) 17      (C) 19      (D) 23      (E) 29

16. 有一個五位數  $\overline{a986b}$  可被 72 整除，其中  $a$  是萬位數、 $b$  是個位數。請問  $a+b$  之值是什麼？

- (A) 9      (B) 10      (C) 12      (D) 13      (E) 15

17. 一頂帽子由 6 片相同尺寸相同形狀的元件組成。



若每片元件的表面可上塗金色或棕色，請問共可做出多少種不同的帽子？

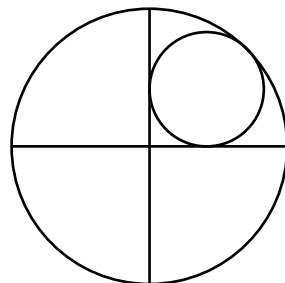
- (A) 12      (B) 14      (C) 16      (D) 18      (E) 20

18. 對於所有正整數  $n$ ，定義  $\text{Snap}(n)=2n$ ，當  $n$  為偶數；定義  $\text{Snap}(n)=3n$ ，當  $n$  為奇數。若  $p$  為大於 2 的質數，請問  $\text{Snap}(\text{Snap}(p-1)-p)$  之值是什麼？

- (A)  $p-2$                       (B)  $2p-2$                       (C)  $2(p-2)$   
 (D)  $3p-2$                       (E)  $3(p-2)$

19. 一個小圓內切於一個四分之一大圓。請問這個小圓的面積與四分之一大圓的面積之比是什麼？

- (A)  $2:3$                       (B)  $4:5$                       (C)  $3:(2+\sqrt{3})$   
 (D)  $\sqrt{2}:\sqrt{3}$                       (E)  $4:(3+2\sqrt{2})$



20. 定義運算  $\otimes$  為  $a \otimes b = a + b^2$ 。已知  $a > 0$  且  $(a \otimes a) \otimes a = a \otimes (a \otimes a)$ ，則  $a$  等於

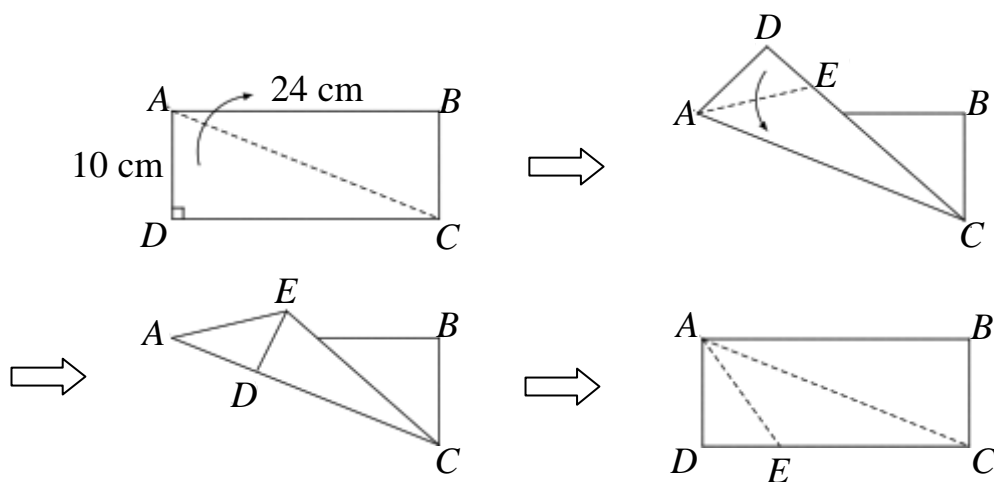
- (A) 1                      (B)  $\sqrt{2}$                       (C)  $\sqrt{2}-1$                       (D)  $\sqrt{2}+1$                       (E) 2

### 21-25 題，每題 5 分

21. 一個**超級階乘**  $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 12!$  可以表示成一個階乘與一個完全平方數的乘積，即  $m! \times n^2$ 。請問  $m$  之值是什麼？

- (A) 4                      (B) 6                      (C) 8                      (D) 10                      (E) 12

22. 下圖所示矩形紙張的長  $AB=24\text{cm}$ 、寬  $AD=10\text{cm}$ 。將它沿著對角線  $AC$  翻摺，然後將三角形  $ACD$  沿著直線  $AE$  翻摺使得  $AD$  與  $AC$  重合，然後將紙張展開。



請問線段  $DE$  的長度為多少  $\text{cm}$ ？

- (A)  $\frac{13}{2}$                       (B)  $\frac{10}{\sqrt{3}}$                       (C)  $\frac{20}{3}$                       (D) 8                      (E) 12

23. 使用數碼 1 和 0 可以寫出 16 種不同的四位數串，其中三個數串為 1010、0100、1001，這三個數串都可以視為是 101001 的子數串。有一個十九位數 1 和 0 的數串，它包含有長度為 4 的 16 個子數串各恰一個。已知這個數串以 1111 開頭，請問它的最後四碼是什麼？  
 (A) 1110      (B) 0000      (C) 0110      (D) 1010      (E) 0111
- 
24. 將  $n$  個點任意放置在一個邊長為 16 單位長的正立方體內部或表面上，使得無論怎麼放至少都有其中兩個點的距離小於 14 單位長。請問最小的  $n$  值是什麼？  
 (A) 8      (B) 9      (C) 11      (D) 12      (E) 13
- 
25. 小羅站在森林的正中央，以他所站的點作為原點，其它座標上的每個整數點上都有一棵樹幹半徑都相等的樹。從他所站的位置，他無法看到任何方向第二排以後的樹，此即，他無法看到任何兩個分量都大於 2 的座標上的樹。請問這些樹的樹幹半徑最小是多少？  
 (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$       (D)  $\frac{1}{\sqrt{13}}$       (E)  $\frac{1}{2(\sqrt{13}-3)}$
- 

問題 26~30 的答案為 000~999 之間的整數，  
 請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題佔 6 分，第 27 題佔 7 分，第 28 題佔 8 分，  
 第 29 題佔 9 分，第 30 題佔 10 分。

26. 已知  $m+n=11$  且  $m^2+n^2=99$ 。請問  $m^3+n^3$  之值是什麼？
- 

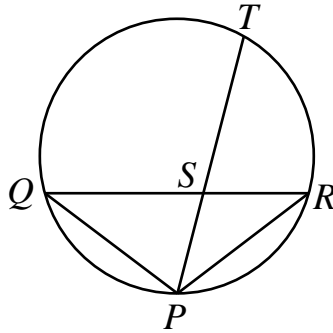
27. 將一個四位數減去一個三位數，所得的差也是一個三位數。

$$\square\square\square\square - \square\square\square = \square\square\square$$

且這些數的十個數碼全都互不相同。請問所得的差最小可能值是什麼？

---

28. 在三角形  $PQR$  中， $PQ=PR=40$  cm，點  $S$  在線段  $QR$  上使得  $PS=25$  cm。延長線段  $PS$  交  $PQR$  的外接圓於點  $T$ 。



請問線段  $PT$  的長度是多少 cm？

29. 給定多項式  $f$ 。我們知道它的所有係數是非負整數且  $f(1)=6$ 、 $f(7)=3438$ 。請問  $f(3)$  之值是什麼？

30. 在夢幻島上有許多小鎮，小鎮間有一些道路相連。每個小鎮都有三條道路：一條紅線、一條黃線、一條藍線與其它三個不同的小鎮相連，任兩條路除了在端點以外沒有其它的交點。如果您從任何一個小鎮開始依照紅線、黃線道路交錯(RYRY...)行駛，則您只要行駛超過六個不同的道路就將能回到原來出發的小鎮。事實上，依照 RYRYRY 的方式行駛就一定會回到原來出發的小鎮。同樣地，如果依照黃線、藍線道路交錯行駛六個不同的路段(YBYBYB)也能回到原來出發的小鎮。另一方面，依照紅線、藍線道路交錯行駛四個不同的路段(RBRB)也能夠回到原來出發的小鎮。請問夢幻島上共有多少個小鎮？

\*\*\*