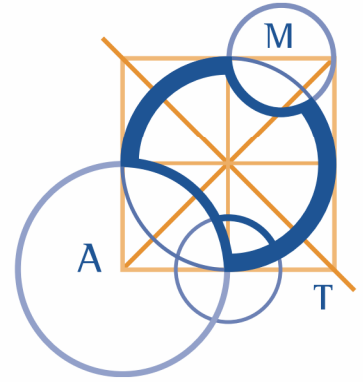


# AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION

AN ACTIVITY OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICS TRUST



THURSDAY 6 AUGUST 2009

## SENIOR DIVISION COMPETITION PAPER

高級卷 (11—12 年級)

考試時間：75 分鐘

### 注意事項

#### 一般規定

1. 未獲監考老師許可之前不可翻開此測驗題本。
2. 各種通訊器材一律不得攜入考場，不准使用電子計算器、計算尺、對數表、數學公式等計算器具。作答時可使用直尺與圓規，以及兩面全空白的草稿紙。
3. 題目所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。
4. 最前 25 題為選擇題，每題有五個選項。最後 5 題要求填入的答案為 0 至 999 的正整數。題目一般而言是依照越來越難的順序安排，對於錯誤的答案不會倒扣分數。
5. 本活動是數學競賽而不同於學校測驗，別期望每道題目都會作。考生只與同地區同年級的其他考生評比，因此不同年級的考生作答相同的試卷將不作評比。
6. 請依照監考老師指示，謹慎地在答案卡上填寫您的基本資料。若因填寫錯誤或不詳所造成之後果由學生自行負責。
7. 進入試場後，須等待監考老師宣佈開始作答後，才可以打開題本進行答題。

#### 作答須知

1. 限用 B 或 2B 鉛筆填寫答案。
2. 請用 B 或 2B 鉛筆在答案卡上將您認為正確選項的圓圈塗滿（不是在題本上）。
3. 您的答案卡將由電腦閱卷，為避免電腦誤判，請不要在答案卡上其他任何地方塗劃任何記號。填寫答案卡時，若需要修改，可使用軟性橡皮小心擦拭，並確定答案卡上無殘留痕跡。

#### 特別約定

為確保競賽之公平性及認證成績優異學生，AMC 主辦單位保留要求考生重測之權利。

---

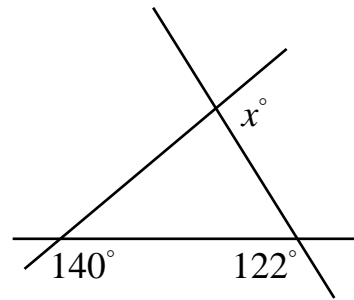
## 高級卷(11-12 年級)

---

### 1-10 題，每題 3 分

1. 算式 $(2000+9)-(2000-9)$ 等於  
(A) 4000      (B) 2018      (C) 3982      (D) 0      (E) 18
- 

2. 在右圖中， $x$  之值等於  
(A) 140      (B) 122      (C) 80  
(D) 90      (E) 98

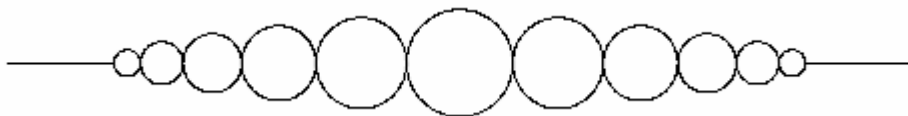


3. 方程  $y=kx$  的圖形通過點  $(-2, -1)$ ，則  $k$  之值等於  
(A) 2      (B) -2      (C) 4      (D)  $\frac{1}{2}$       (E)  $-\frac{1}{2}$
- 

4. 算式  $(0.6)^{-2}$  等於  
(A) -0.36      (B) 0.036      (C)  $\frac{9}{25}$       (D)  $\frac{25}{9}$       (E) 3.6
- 

5. 多項式  $(x-y)-2(y-z)+3(z-x)$  等於  
(A)  $-2x-3y+5z$       (B)  $-2x-3y-z$       (C)  $4x+y-z$   
(D)  $4x+3y-z$       (E)  $2x+3y-5z$
- 

6. 有一串珠子，最大的珠子在正中央而最小的珠子在兩端。珠子的尺寸由兩端至中央漸大，如圖所示。



最小的珠子每枚價格為 \$1、次小的珠子每枚價格為 \$2、再次小的珠子每枚價格為 \$3，依此類推。已知這串珠子共有 25 枚珠子，請問支付 \$200 購買此串珠子應可找回多少？

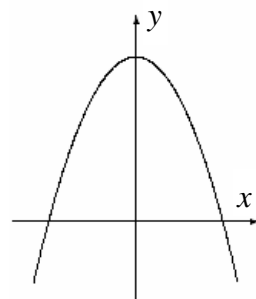
- (A) \$25      (B) \$31      (C) \$40      (D) \$52      (E) \$55
-

7. 對於所有的正數  $a$ 、 $b$ ，若  $a*b = a + \frac{1}{b}$ ，則  $1*(2*3)$  之值等於

- (A)  $\frac{10}{3}$       (B)  $\frac{10}{7}$       (C)  $\frac{11}{6}$       (D)  $\frac{9}{2}$       (E)  $\frac{3}{10}$

8. 右圖所示為  $y = ax^2 + bx + c$  之圖形，其頂點在  $y$  軸上。  
請問下列哪一項敘述必定正確？

- (A)  $a+b+c=0$       (B)  $a+b-c < 0$   
(C)  $-a+b-c > 0$       (D)  $a+b+c < 0$   
(E) 沒有足夠的資訊可判斷



9. 某校共有 1000 名學生，其中 570 名為女生。該校四分之一的學生搭巴士上學而 313 名男學生不是搭巴士上學。請問該校有多少名女生搭巴士上學？

- (A) 7      (B) 63      (C) 153      (D) 180      (E) 133

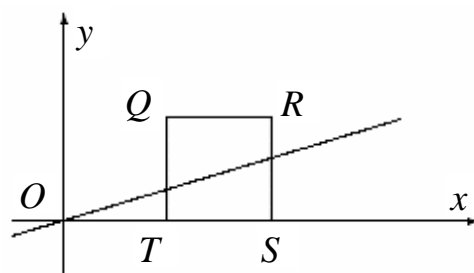
10. 某球隊衣櫃的箱子內有 6 頂藍色與 3 頂紅色的帽子，從箱子中任取出二頂帽子，請問這二頂帽子顏色相同的機率是什麼？

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{5}{12}$       (C)  $\frac{2}{3}$       (D)  $\frac{3}{4}$       (E)  $\frac{2}{9}$

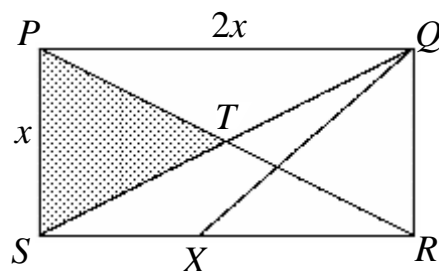
### 11-20 題，每題 4 分

11. 在右圖正方形  $QRST$  中，點  $T$  之座標為  $(1, 0)$ 、點  $S$  之座標為  $(2, 0)$ 。一條直線通過原點並將此正方形的面積均分。請問下列哪一項是此直線的方程？

- (A)  $y = \frac{1}{2}x$       (B)  $y = \frac{1}{3}x$   
(C)  $y = \frac{2}{3}x$       (D)  $y = 2x$       (E)  $y = 3x$



12. 在右圖矩形  $PQRS$  中， $PQ=2x$  cm、 $PS=x$  cm 且兩對角線  $PR$  與  $QS$  相交於點  $T$ 。若點  $X$  在邊  $RS$  上且  $QX$  將五邊形  $PQRST$  的面積均分，請問  $RX$  之長度為多少 cm？



- (A)  $\frac{x}{2}$       (B)  $x$       (C)  $\frac{5x}{4}$   
 (D)  $\frac{3x}{2}$       (E)  $\frac{3x}{4}$

13. 方程  $5^x - 5^{x-2} = 120\sqrt{5}$  的解為具有  $\frac{a}{b}$  形式的有理數，其中  $b \neq 0$  且  $a, b$  為互質的正整數。請問  $a+b$  之值是什麼？

- (A) 3      (B) 5      (C) 7      (D) 9      (E) 11

14. 在圓  $x^2 + y^2 = 50$  上，請問有多少點  $(x, y)$  使得  $x$  或  $y$  座標至少有一為整數？

- (A) 16      (B) 30      (C) 48      (D) 60      (E) 100

15. 在 1、2、3、4、5 等五個數的所有排列中，若第二個數與第四個數都比相鄰的數大，則稱此種排列為「鳳眉排列」。例如： $(1, 3, 2, 5, 4)$  是一個「鳳眉排列」但  $(1, 3, 4, 5, 2)$  則不是。請問共有多少個「鳳眉排列」？

- (A) 16      (B) 12      (C) 15      (D) 24      (E) 18

16. 請問方程  $(x^2 - x)^2 = 18(x^2 - x) - 72$  的所有正根之和是什麼？

- (A) 5      (B) 7      (C) 8      (D) 9      (E) 18

17. 在一個鐘面上，連接數字 5 和 9 與連接 3 和 8 的兩條直線所相交出的銳角為多少度？

- (A) 15      (B)  $22\frac{1}{2}$       (C) 30      (D) 45      (E) 60

18. 一個正分數與它的倒數之和化為最簡分數為  $\frac{x}{60}$ ，其中  $x$  為正整數。請問可能的  $x$  值有多少種？

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5

19. 在右圖  $\triangle PQT$  中,  $PQ=10\text{ cm}$ 、 $QT=5\text{ cm}$  且  $\angle PQT=60^\circ$ ,  $PW$ 、 $PY$  和  $TQ$  分別切圓  $S$  於點  $W$ 、 $Y$  和  $V$ 。請問此圓之半徑為多少  $\text{cm}$ ?

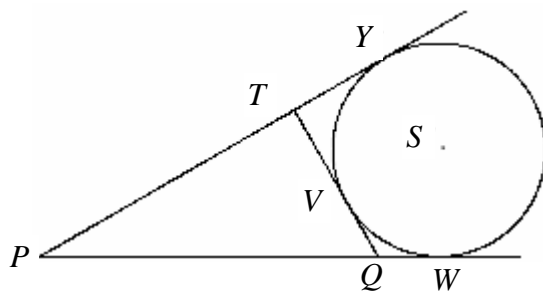
(A)  $\frac{5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

(B)  $\frac{5(3-\sqrt{3})}{2}$

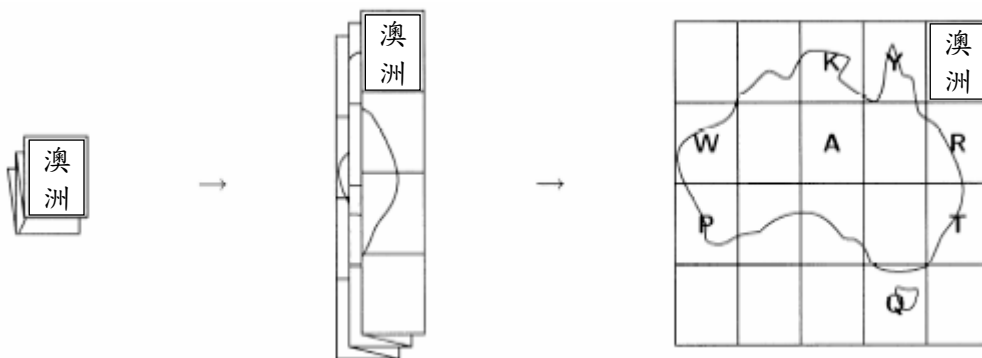
(C)  $\frac{5}{1+\sqrt{3}}$

(D)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(E)  $\frac{25\sqrt{3}}{6}$



20. 我購買了一張澳洲地圖, 將它展開並標記上 8 個我想去旅遊的地點。



然後我將地圖依照上述方式重新摺好放在桌上。請問我標記的地點從上到下的順序為何?

(A) RTYQKAWP

(B) YKRAWTPQ

(C) RTQYKAWP

(D) YKTPRAWQ

(E) YKWARTPQ

### 21-25 題, 每題 5 分

21. 一個迴文數是從前面讀起與從後面讀起數值相同的數。例如: 55、101、8668 都是迴文數。在四位數中共有 90 個迴文數, 請問這些四位迴文數中共有多少個可被 7 整除?

(A) 7

(B) 9

(C) 14

(D) 18

(E) 21

22. 在右圖中, 六個半徑為 3  $\text{cm}$  的圓緊密地相切於一個平行四邊形內部。請問此平行四邊形之面積為多少  $\text{cm}^2$ ?

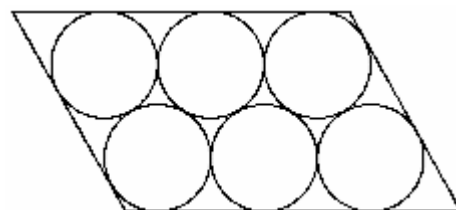
(A) 108

(B)  $8(4+3\sqrt{3})$

(C)  $15(2+\sqrt{3})$

(D)  $12(9+5\sqrt{3})$

(E) 216



23. 某位國王懷疑他的臣子 A、B、C、D、E、F 圖謀叛變。國王分別與他們私下密談，他們告訴國王：

A：「F 是忠臣但 E 則是叛徒。」

B：「A 是忠臣。」

C：「F 是忠臣但 B 是叛徒。」

D：「C 是忠臣但 B 是叛徒。」

E：「D 是叛徒。」

F：「A 是忠臣。」

每位叛徒都知道哪些人是叛徒，但他們都告訴國王錯誤的訊息，指控忠臣為叛徒且把叛徒說成忠臣。每位忠臣都將他所知道的是據實以報，故忠臣指認叛徒的訊息是可靠的，但他宣稱的忠臣的訊息可能是錯的。請問這六位臣子中共有多少位叛徒？

- (A) 1            (B) 2            (C) 3            (D) 4            (E) 5

24. 以邊長為 1 cm 的正方形之四個頂點為圓心，作四個半徑為 1 的圓。請問這四個圓內部共同相交的部分之面積為多少  $\text{cm}^2$ ？

(A)  $2\sqrt{3} - \pi$             (B)  $\pi - \sqrt{2}$             (C)  $1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

(D)  $\pi - 2\sqrt{2}$             (E)  $\frac{\pi - 3 - \sqrt{3}}{2}$

25. 令  $f(x) = \frac{x+6}{x}$  且  $f_n(x) = f(f(\cdots(f(x))\cdots))$  為  $n$  層  $f$  的合成函數。例如：

$$f_2(x) = \frac{\frac{x+6}{x} + 6}{\frac{x+6}{x}} = \frac{7x+6}{x+6}, \quad f_3(x) = \frac{\frac{7x+6}{x+6} + 6}{\frac{7x+6}{x+6}} = \frac{13x+42}{7x+6}$$

$f_n(x) = x$  的所有實根的集合，請問集合  $S$  有多少個元素？

- (A) 2            (B)  $2n$             (C)  $2^n$             (D) 1            (E) 無限多

問題 26~30 的答案為 000~999 之間的整數，

請將答案填在答案卡上對應的位置。

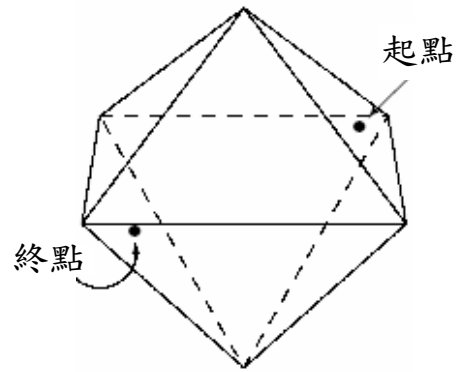
第 26 題佔 6 分，第 27 題佔 7 分，第 28 題佔 8 分，

第 29 題佔 9 分，第 30 題佔 10 分。

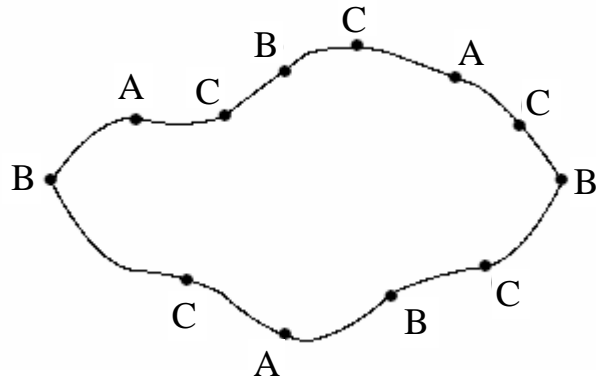
26. 四個正整數之倒數和為  $\frac{19}{20}$ ，其中有三個數之比為 1:2:3。請問這四個正整數之和是什麼？

27. 若一個數的數碼嚴格遞增則稱此數為「上升數」。例如：189 與 3468 都是上升數，而 142 與 466 則不是。請問哪個三位數  $n$  ( $n$  介於 100 與 999 之間) 是上升數且  $6n$  也是上升數？

28. 有一個正八面體的稜長為 6 cm。若從其中一個面的中心沿著這個正八面體的表面到相對面的中心之最短路徑長度為  $d$  cm，請問  $d^2$  之值是什麼？



29. 某國欲建築一條長為 1080 km 的環線鐵路。由 A、B、C 三家公司分別來營運及規劃建造各車站。A 公司將建三座車站，每站之間的距離都為 360 km、B 公司將建四座車站，任相鄰兩站之間的距離都為 270 km、C 公司將建五座車站，任相鄰兩站之間的距離為 216 km。



該國政府要求這三家公司要使所有各相鄰車站之間的最長距離愈小愈好。請問這個距離是多少 km？

30. 在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ 。在底邊  $AD$  上取一點  $E$  使得  $BE$  與  $CE$  將該梯形切割為三個直角三角形，這三個直角三角形兩兩互相相似，但兩兩互不全等。已知這三個三角形之邊長都是整數且  $AD$  的長度為 2009，請問  $BC$  的長度是多少？