

TRML 思考賽-2008

思考賽共 10 題，每題 4 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。

准考編號大會已直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

在一個 $m \times n$ 的棋盤中，若在某一格置放一個兵，則它可以控制本格及上下左右等格。舉例來說，在 3×5 的棋盤中，如圖（一），放在 $(2,3)$ 的兵可以控制 $(2,2)$ ， $(1,3)$ ， $(2,3)$ ， $(3,3)$ ， $(2,4)$ 這五格；而如圖（二），放在 $(1,1)$ 的兵僅能控制 $(1,1)$ ， $(2,1)$ ， $(1,2)$ 這三格。

	1	2	3	4	5
1			.		
2		.	兵	.	
3			.		

圖（一）

	1	2	3	4	5
1	兵	.			
2	.				
3					

圖（二）

設 $f(m, n)$ 表示在 $m \times n$ 棋盤放最少數目的兵，使得棋盤上的每一格都至少能被某一個兵控制。舉例來說，不難可以驗證 $f(1,1) = f(1,2) = f(1,3) = 1$ 及 $f(2,2) = f(2,3) = 2$ 。要說明 $f(2,3) = 2$ ，首先，在 $(1,1)$ 和 $(2,3)$ 這兩格各放一個兵（如圖（三）所示），就能控制整個 2×3 的棋盤，所以 $f(2,3) \leq 2$ ；其次，在 2×3 的棋盤中，每一個兵最多只能控制 4 格，所以 $f(2,3) \geq 2$ ；故有 $f(2,3) = 2$ 。

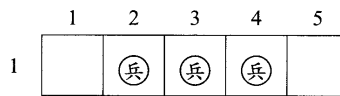
	1	2	3
1	兵		
2			兵

圖（三）

1. 求 $f(1, n)$ 之值（應說明為何是此值）。
2. 求 $f(2, n)$ 之值（應說明為何是此值）。

3. 求 $f(3, n)$ 之值 (應說明為何是此值)。
4. 證明 $f(m, n) \leq \frac{(m+4)(n+4)}{5}$ 。
5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, n)}{n^2}$ 之值 (應說明為何是此值)。

如果將前述(兵)控制各格的規則改變,在新的規定裏,放在某一格的(兵)只能控制其上下左右等格,但不能控制自己所在的格子。例如,在 3×5 的棋盤中,如圖(一)所示,放在 $(2, 3)$ 的(兵)可以控制 $(2, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, $(2, 4)$ 這四格,但不能控制自己所在的 $(2, 3)$ 這一格;又如圖(二)所示,放在 $(1, 1)$ 的(兵)可以控制 $(2, 1)$, $(1, 2)$ 這二格,但不能控制 $(1, 1)$ 這一格。設 $g(m, n)$ 表示在 $m \times n$ 棋盤放最少數目的(兵),使得用這種新的控制方式,棋盤上的每一格都能被某一(兵)控制。舉例來說, $g(1, 1)$ 沒有定義;不難可以驗證, $g(1, 2) = g(1, 3) = g(1, 4) = g(2, 2) = g(2, 3) = 2$; 而 $g(1, 5) = 3$ 。要說明 $g(1, 5) = 3$, 首先,在 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ 這三格各放一個(兵)(如圖(四)所示),就能控制整個 1×5 的棋盤,所以 $g(1, 5) \leq 3$; 其次,在 1×5 的棋盤中,每一個(兵)最多只能控制 2 格,所以 $g(1, 5) \geq 3$; 故有 $g(1, 5) = 3$ 。



圖(四)

6. 當 $n \neq 4k + 2$ 時, 求 $g(1, n)$ 之值 (應說明為何是此值)。
7. 當 $n = 4k + 2$ 時, 求 $g(1, n)$ 之值 (應說明為何是此值)。
8. 求 $g(2, n)$ 之值 (應說明為何是此值)。
9. 證明 $g(m, n) \leq \frac{(m+3)(n+4)}{4}$ 。
10. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n, n)}{n^2}$ 之值 (應說明為何是此值)。