TRML 思考賽-2008

思考賽共 10 題，每題 4 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。

准考編號大會已直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

在一個$m\times n$的棋盤中，若在某一格置放一個兵，則它可以控制本格及上下左右等格。舉例來說，在3×5的棋盤中，如圖（一），放在$(2,3)$的兵可以控制$(2,2)$，$(1,3)$，$(2,3)$，$(3,3)$，$(2,4)$這五格；而如圖（二），放在$(1,1)$的兵僅能控制$(1,1)$，$(2,1)$，$(1,2)$這三格。

	1	2	3	4	5
1			·		
2		·	兵	·	
3			·		

圖（一）

	1	2	3	4	5
1	兵	·			
2	·				
3					

圖（二）

設$f(m,n)$表示在$m\times n$棋盤放最少數目的兵，使得棋盤上的每一格都至少能被某一個兵控制。舉例來說，不難可以驗證$f(1,1)=f(1,2)=f(1,3)=1$及$f(2,2)=f(2,3)=2$。要說明$f(2,3)=2$，首先，在$(1,1)$和$(2,3)$這兩格各放一個兵（如圖（三）所示），就能控制整個2×3的棋盤，所以$f(2,3)\le 2$；其次，在2×3的棋盤中，每一個兵最多只能控制 4 格，所以$f(2,3)\ge 2$；故有$f(2,3)=2$。

	1	2	3
1	兵		
2			兵

圖（三）

1. 求$f(1,n)$之值（應說明為何是此值）。

2. 求$f(2,n)$之值（應說明為何是此值）。

3. 求 $f(3,n)$ 之值（應說明為何是此值）。

4. 證明 $f(m,n) \le \dfrac{(m+4)(n+4)}{5}$。

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n,n)}{n^2}$ 之值（應說明為何是此值）。

如果將前述兵控制各格的規則改變，在新的規定裏，放在某一格的兵只能控制其上下左右等格，但不能控制自己所在的格子。例如，在 3×5 的棋盤中，如圖（一）所示，放在 $(2,3)$ 的兵可以控制 $(2,2)$，$(1,3)$，$(3,3)$，$(2,4)$ 這四格，但不能控制自己所在的 $(2,3)$ 這一格；又如圖（二）所示，放在 $(1,1)$ 的兵可以控制 $(2,1)$，$(1,2)$ 這二格，但不能控制 $(1,1)$ 這一格。設 $g(m,n)$ 表示在 $m\times n$ 棋盤放最少數目的兵，使得用這種新的控制方式，棋盤上的每一格都能被某一兵控制。舉例來說，$g(1,1)$ 沒有定義；不難可以驗證，$g(1,2)=g(1,3)=g(1,4)=g(2,2)=g(2,3)=2$；而 $g(1,5)=3$。要說明 $g(1,5)=3$，首先，在 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$ 這三格各放一個兵（如圖（四）所示），就能控制整個 1×5 的棋盤，所以 $g(1,5)\le3$；其次，在 1×5 的棋盤中，每一個兵最多只能控制 2 格，所以 $g(1,5)\ge3$；故有 $g(1,5)=3$。

	1	2	3	4	5
1		兵	兵	兵	

圖（四）

6. 當 $n\ne4k+2$ 時，求 $g(1,n)$ 之值（應說明為何是此值）。

7. 當 $n=4k+2$ 時，求 $g(1,n)$ 之值（應說明為何是此值）。

8. 求 $g(2,n)$ 之值（應說明為何是此值）。

9. 證明 $g(m,n) \le \dfrac{(m+3)(n+4)}{4}$。

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n,n)}{n^2}$ 之值（應說明為何是此值）。