

TRML 團體賽-2008

1. 若 $a > b > 1$ 且 $\log_a b + \log_b a = 2\sqrt{5}$ ，則 $\log_a b - \log_b a =$ _____。
2. 試求滿足方程組 $\begin{cases} x:y = 20:1 \\ y^{\log x} = 25 \end{cases}$ 之所有整數數對 (x, y) 。
3. 若 $\triangle ABC$ 為一正三角形，且在此三角形內部中有一點 P 使得 $\overline{AP} = 3$ ， $\overline{BP} = 4$ ， $\overline{CP} = 5$ ，試問此正三角形之邊長為何？
4. 設點 $(3, 3)$ 在拋物線 $y = x^2 + (a+1)x + b$ 上 (其中 a, b 為固定的實數)，且此拋物線上的點 (x, y) 均滿足 $y \geq x$ ，則拋物線的頂點到原點的距離為多少？
5. A, B, C, D, E 五人依序擲一個骰子，最先擲出 6 點的人獲勝。若直到 E 擲完為止都沒有出現 6 點，則從 A 開始依上述方式重複進行，直到決定勝利者為止。試求 C 獲勝的機率。
6. f 是從所有整數映至所有整數的函數，對所有整數 n 滿足：
 - (a) $f(f(n)) = n$,
 - (b) $f(f(n+2)+2) = n$,
 - (c) $f(0) = 1$.試求 $f(2008) = ?$
7. 試求 $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2}}$ 之值是多少？
8. 已知 Z_1, Z_2 均為複數，若 $|Z_1| = |Z_2| = 3$ ， $|Z_1 - Z_2| = 3\sqrt{3}$ ，則 $\log_3 |(Z_1 \overline{Z_2})^{20} + (\overline{Z_1} Z_2)^{20}|$ 之值為多少？
9. 考慮所有五位數，其各位數字均不為 0 且這五位數的各位數是由三個數字所組成，有一個數字恰出現一次，而其他二數字恰各出現兩次，試問這樣的五位數共有多少個？
10. 設 $P-ABC$ 為以正三角形 ABC 為底的正三角錐， O 與 G 分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PBC$ 的重心。若正三角錐的高 \overline{PO} 等於 15，正三角形 ABC 邊長等於 9，求線段 \overline{AG} 的長度。